天津市NOI选拔赛2012年第一轮解题报告

A 去重和

首先考虑一个较简单的问题，固定右端点为n，也即是说所有查询区间为(l_i, n)。此时，对于任一出现过的数x，在数列$\{a_i\}$中只保存其最后一次出现的值，其余清零得到数列$\{b_i\}$。比如说数列

$$\{a_i\} = \{2, 3, 2, 4, 2, 5, 4\}$$

经过上述变换后可得

$$\{b_i\} = \{0, 3, 0, 0, 2, 5, 4\}$$

此后，每次询问时只须求数列$\{b_i\}$的子段和即可。求解子段和时可以使用树状数组或者线段树(这是以备以后数列$\{b_i\}$可能修改)。

由于本题中查询右端点并不能固定，此时可以将数列视为动态的，查询视为静态的，即数列在向右生长，如下表所示

$\{a_i\}$	$\{b_i\}$	响应的查询
$\{2\}$	$\{2\}$	$r_i = 1$的查询
$\{2, 3\}$	$\{2, 3\}$	$r_i = 2$的查询
$\{2, 3, 2\}$	$\{0, 3, 2\}$	$r_i = 3$的查询
$\{2, 3, 2, 4\}$	$\{0, 3, 2, 4\}$	$r_i = 4$的查询
$\{2, 3, 2, 4, 2\}$	$\{0, 3, 0, 4, 2\}$	$r_i = 5$的查询
$\{2, 3, 2, 4, 2, 5\}$	$\{0, 3, 0, 4, 2, 5\}$	$r_i = 6$的查询
$\{2, 3, 2, 4, 2, 5, 4\}$	$\{0, 3, 0, 0, 2, 5, 4\}$	$r_i = 7$的查询

数列$\{b_i\}$的变化为，每次将a_i加入末端，然后将a_i上一次出现的的位置(记做$p(a_i)$)对应的项$b_{p(a_i)}$清零。使用数组维护$p(x)$，将所有查询读入程序，依照r_i排序，然后依次处理，最后将结果的顺序还原即可。 时间复杂度为$O((n+q)\log n)$

B 比例树

简单的最优比率生成树。二分答案，初始范围为$r \in [0.0, 1.0]$，带入比例r，求得权$A - rB$的最小生成树，若$A - rB < 0$，则$r > r_{\text{opt}}$，否则$r \le r_{\text{opt}}$，其中r_{opt}表示最优比例，控制精度得到r_{opt}后，带入求解具体比例，约分，然后输出即可。(另外由于本题中的输入数据约束$0 \le a \le b \le 1000$，若对于精度问题有所疑虑，可以了解一下Farey数列，并结合Kruskal算法求解最小生成树的过程，得到一个没有精度问题的算法，复杂度约为$O(n\log^2 n)$)

C 树与链

本题可以使用树上的分治的方法或者树形动态规划的方法求解，本文中只讲解树形动态规划的方法。

此问题可以转化成求解长度大于l的简单路径条数。 首先设置结点1为根结点，定义$\text{num}[i][j]$表示以i为根的子树中，与i相距j的结点个数，$\text{sum}[i][j]$，表示以i为根的子树中，与i相距不少于j的结点个数，在求解$\text{num}[i]$和$\text{sum}[i]$的过程中，利用(覆盖)$\text{num}[j]$和$\text{sum}[j]$的结果，其中j为i的孩子结点，并且以j为根的子树的高度为i的所有孩子中最高的。

过程中以较矮的子树为线索进行统计和动态规划(较矮的子树只会向其父亲结点贡献数据，只须一次遍历，而较高的子树则不须遍历即可直接提供给其父亲结点(只须在其数据开始处添加一个元素即可))，总复杂度可以达到$O(n)$。